PROCEEDINGS OF IAM, V.6, N.2, 2017, pp.186-201

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ГАЗЛИФТНОМ ПРОЦЕССЕ, ОПИСЫВАЕМОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ*

Н.А Алиев[1] , Г.С.Алиева[1] , Р.М. Тагиев[1] , А.С. Фараджев[1], М. Ханбабаева[3]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2]Институт Математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
[3]Институт Геологии НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
e-mail: galiyeva20@mail.ru, tagiyev.reshad@gmail.com

Резюме. В данной работе рассмотрена математическая модель для добычи нефти с помощью газлифтного способа. Показывается, что уравнение движения газа и смеси газа с жидкостью описывается системой дифференциальных уравнений гиперболического типа с частными производными. Функции $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ определены в форме ряда. Построен функционал, зависящий от этих функций и определен коэффициент гидравлического сопротивления, дающий минимальное значение этому функционалу. Показано, что в зависимости от выбора количества членов ряда, значения λ_c приближаются к оптимальным значениям, полученных из практики.

Ключевые слова: Газлифт, смесь газа с жидкостью, коэффициент гидравлического сопротивления, метод рядов.
AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

Известно, что при добыче нефти одной из основных задач при создании автоматического управления системой является нахождение коэффициента гидравлического сопротивления [2, 3]. Парафин, который имеется в составе смеси жидкости и газа, приклеивается к стене трубы и создает поверхность определенной толщины и после определенного времени мешает работе системы [6] в установившемся режиме [1,4,5]. С этой точки зрения определение коэффициента гидравлического сопротивления помогает внести нужную коррекцию в рабочий режим. По этой причине решение уравнение движением, описываемого гиперболическим уравнением, найдено в виде рядов [9,10]. Полученные результаты применены для определения коэффициента гидравлического сопротивления в нефтяной трубе. В конкретном примере статистическое значение коэффициента гидравлического сопротивления λ_c сравнивается с найденным значением

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 24.10.2017

того же коэффициента $\tilde{\lambda}_c$ и при этом обнаруживается, что они отличаются друг от друга на порядок.

2. Постановка задачи

Известно, что математическая модель в газлифтном процессе приводится к граничной задаче для систем уравнений гиперболического типа с частными производными первого порядка. [7,8]

$$\begin{cases} -F\,\dfrac{\partial \overline{P}(x,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial \overline{Q}(x,t)}{\partial t} + 2a\overline{Q}(x,t), \\ F\,\dfrac{\partial \overline{P}(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \overline{Q}(x,t)}{\partial x}, \qquad x \in (0,l) \cup (l,\,2l),\ t \in (0,T) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \overline{P}(0,t) = \overline{P}_0(t), \\ \overline{Q}(0,t) = \overline{Q}_0(t), \qquad t \in [0,T], \end{cases} \tag{2}$$

Здесь F, a, c и l заданные константы, $\overline{P}_0(t)$ и $\overline{Q}_0(t)$ заданные непрерывные функции, $\overline{P}(x,t)$ и $\overline{Q}(x,t)$ функции, которые должны определяться.

Опишем решение этой задачи в виде рядов [9]

$$\begin{cases} \overline{P}(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k(t)\dfrac{x^k}{k!}, \\ \overline{Q}(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{Q}_k(t)\dfrac{x^k}{k!}, \qquad x \in (0,l) \cup (l,2l), \quad t \in (0,T). \end{cases} \tag{3}$$

Тогда задача приводится к нахождению некоторых неизвестных коэффициентов $\overline{P}_k(t)$ и $\overline{Q}_k(t)$ ($\overline{P}_0(t)$ и $\overline{Q}_0(t)$ заданы в граничных условиях (2), которые приведены ниже. В зависимости от четности или нечетности индексов они определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \overline{P}_{2k}(t) = \left(\dfrac{d}{dt} + 2a_2\right)^k \dfrac{\overline{P}_0^{(k)}(t)}{c_2^k}, \\ \overline{Q}_{2k}(t) = \left(\dfrac{d}{dt} + 2a_2\right)^k \dfrac{\overline{Q}_0^{(k)}(t)}{c_2^k}, \qquad k \ge 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \overline{P}_{2k+1}(t) = -\left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)^{k+1} \frac{\overline{Q}_0^{(k)}(t)}{F_2 c_2^k}, \\ \overline{Q}_{2k+1}(t) = -\left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)^{k} \frac{F_2 \overline{P}_0^{(k+1)}(t)}{c_2^{k+1}}, \qquad k \geq 0, \end{cases} \tag{5}$$

Полученные решения обозначим как $\overline{P}_2(x,t,a_2)$и $\overline{Q}_2(x,t,a_2)$ и рассмотрим следующий функционал:

$$I = \int_0^T \left\{ \left[\overline{P}_2(2l,t,a_2) - \tilde{P}_2(2l,t)\right]^2 + \left[\overline{Q}_2(2l,t,a_2) - \tilde{Q}_2(2l,t)\right]^2 \right\} dt. \tag{6}$$

Здесь $\tilde{P}_2(2l,t)$ и $\tilde{Q}_2(2l,t)$ заданные функции. Теперь определим коэффициент a_2, который дает минимальное значение функционалу (6). Для этого приравниваем производную функционала по a_2 к нулю и, учитывая (3), получим:

$$\int_0^T \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k(t,a_2)\frac{(2l)^k}{k!} - \tilde{P}_2(2l,t)\right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial \bar{P}_m(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^m}{m!} + \right. \tag{7}$$

$$\left. + \left[\sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k(t,a_2)\frac{(2l)^k}{k!} - \tilde{Q}_2(2l,t)\right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial \bar{Q}_m(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^m}{m!} \right\} dt = 0$$

Если из заданных рядов принять во внимание только два члена, (7) можем записать в виде .

$$\int_0^T \left\{ \left[\bar{P}_0(t,a_2) + \bar{P}_1(t,a_2)\cdot 2l - \tilde{P}_2(2l,t)\right] \cdot \left[\frac{\partial \bar{P}_0(t,a_2)}{\partial a_2} + \frac{\partial \bar{P}_1(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot 2l\right] + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \left[\bar{Q}_0(t,a_2) + \bar{Q}_1(t,a_2)\cdot 2l - \tilde{Q}_2(2l,t)\right] \cdot \left[\frac{\partial \bar{Q}_0(t,a_2)}{\partial a_2} + \frac{\partial \bar{Q}_1(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot 2l\right] \right\} dt = 0$$

Из уравнений (4) и (5) вычислим члены, входящие в (8)

$$\bar{P}_0(t,a_2) = \bar{P}_0(t)$$

$$\bar{P}_1(t,a_2) = -\left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)\frac{\bar{Q}_0(t)}{F_2} = -\frac{1}{F_2}\bar{Q}'_0(t) - 2\frac{a_2}{F_2}\bar{Q}_0(t) \tag{9}$$

$$\bar{Q}_0(t,a_2) \equiv \bar{Q}_0(t), \quad \bar{Q}_1(t,a_2) = -\frac{F_2}{c_2}\bar{P}'_0(t)$$

Учитывая (9) в (8) имеем,

$$\int_0^T \left\{ \left[\bar{P}_0(t) + \left(-\frac{1}{F_2}\bar{Q}'_0(t) - 2\frac{a_2}{F_2}\bar{Q}_0(t)\right)\cdot 2l - \tilde{P}_2(2l,t)\right] \cdot \left[-\frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t)\right] \right\} dt =$$

$$= a_2 \frac{16l^2}{F_2^2}\int_0^T \bar{Q}_0^2(t)dt - \int_0^T \left\{ \left[\bar{P}_0(t) - \frac{2l}{F_2}\bar{Q}'_0(t) - \tilde{P}_2(2l,t)\right] \cdot \frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t) \right\} dt = 0. \tag{10}$$

Таким образом, для a_2 из (10) получаем линейное уравнение.

Теперь, если возьмем первые три члена из ряда (3), то уравнение (7) приобретает вид:

$$\int_0^T \left\{[\bar{P}_0(t,a_2) + \bar{P}_1(t,a_2)\cdot 2l + \bar{P}_2(t,a_2)\cdot 2l^2 - \tilde{P}_2(2l,t)]\cdot\left[\frac{\partial \bar{P}_0(t,a_2)}{\partial a_2} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{\partial \bar{P}_1(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot 2l + \frac{\partial \bar{P}_2(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot 2l^2\right] + [\bar{Q}_0(t,a_2) + \bar{Q}_1(t,a_2)\cdot 2l + \bar{Q}_2(t,a_2) \times$$
$$\left.\times 2l^2 - \tilde{Q}_2(2l,t)]\cdot\left[\frac{\partial \bar{Q}_0(t,a_2)}{\partial a_2} + \frac{\partial \bar{Q}_1(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot 2l + \frac{\partial \bar{Q}_2(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot 2l^2\right]\right\} dt = 0$$

Снова, учитывая формулы (4) и (5), имеем:

$$\bar{P}_0(t,a_2) = \bar{P}_0(t),$$
$$\bar{P}_1(t,a_2) = -\left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)\frac{\bar{Q}_0(t)}{F_2} = -\frac{1}{F_2}\bar{Q}'_0(t) - 2\frac{a_2}{F_2}\bar{Q}_0(t),$$
$$\bar{P}_2(t,a_2) = \left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)\frac{\overline{P'}_0(t)}{c_2} = \frac{1}{c_2}\bar{P}''_0(t) + 2\frac{a_2}{c_2}\bar{P}'_0(t),$$
$$\bar{Q}_0(t,a_2) = \bar{Q}_0(t), \bar{Q}_1(t,a_2) = -\frac{F_2}{c_2}\bar{P}'_0(t),$$
$$\bar{Q}_2(t,a_2) = \left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)\frac{\overline{Q'}_0(t)}{c_2} = \frac{1}{c_2}\bar{Q}''_0(t) + 2\frac{a_2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)$$

Поставляя эти формулы в верхнее выражение, имеем:

$$\int_0^T \left\{\left[\bar{P}_0(t) + 2l\left(-\frac{1}{F_2}\bar{Q}'_0(t) - 2\frac{a_2}{F_2}\bar{Q}_0(t)\right) + 2l^2\left(\frac{1}{c_2}\bar{P}''_0(t) + 2\frac{a_2}{c_2}\bar{P}'_0(t)\right) - \right.\right.$$
$$-\tilde{P}_2(2l,t)] \times \left[-\frac{2}{F_2}\bar{Q}_0(t)\cdot 2l + \frac{2}{c_2}\bar{P}'_0(t)\cdot 2l^2\right] + [\bar{Q}_0(t) - \frac{F_2}{c_2}\bar{P}'_0(t)\cdot 2l +$$
$$\left. + \left(\frac{1}{c_2}\bar{Q}''_0(t) + \frac{2a_2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)\right)\cdot 2l^2 - \tilde{Q}_2(2l,t)]\cdot\left[2l^2\cdot\frac{2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)\right]\right\} dt =$$
$$= a_2\int_0^T \left\{\left(-\frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t) + \frac{4l^2}{c_2}\bar{P}'_0(t)\right)^2 + \frac{16l^4}{c_2^2}\left(\bar{Q}'_0(t)\right)^2\right\} dt +$$
$$+\int_0^T \left\{\left[\bar{P}_0(t) - \frac{2l}{F_2}\bar{Q}'_0(t) + \frac{2l^2}{c_2}\bar{P}''_0(t) - \tilde{P}_2(2l,t)\right]\left[-\frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t) + \frac{4l^2}{c_2}\bar{P}'_0(t)\right] + \right.$$
$$\left. + \left[\bar{Q}_0(t) - \frac{2lF_2}{c_2}\bar{P}'_0(t) + \frac{2l^2}{c_2}\bar{Q}''_0(t) - \tilde{Q}_2(2l,t)\right] \times \frac{4l^2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)\right\} dt = 0. \tag{11}$$

И в этом случае для a_2 получаем линейное уравнение.

Лемма1: Пусть $\bar{P}_0(t)$ и $\bar{Q}_0(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями второго порядка, $\tilde{P}_2(2l,t)$ и $\tilde{Q}_2(2l,t)$ непрерывные функции. Тогда, если взять два или три члена ряда (7), для параметра a_2 , который дает минимальное значение функционала (6) , получается линейное уравнение.
Если взять четыре члена из ряда (7), оно приобретает вид

$$\int_0^T \left\{ \left[\bar{P}_0(t,a_2) + \bar{P}_1(t,a_2)\cdot 2l + \bar{P}_2(t,a_2)\cdot 2l^2 + \bar{P}_3(t,a_2)\cdot \frac{4}{3}l^3 - \tilde{P}_2(2l,t) \right] \times \right.$$
$$\times \left[\frac{\partial \bar{P}_0(t,a_2)}{\partial a_2} + \frac{\partial \bar{P}_1(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot 2l + \frac{\partial \bar{P}_2(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot 2l^2 + \frac{\partial \bar{P}_3(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot \frac{4}{3}l^3 \right] +$$
$$+\left[\bar{Q}_0(t,a_2) + \bar{Q}_1(t,a_2)\cdot 2l + \bar{Q}_2(t,a_2)\cdot 2l^2 + \bar{Q}_3(t,a_2)\cdot \tfrac{4}{3}l^3 - \tilde{Q}_2(2l,t) \right] \times$$
$$\left. \times \left[\frac{\partial \bar{Q}_0(t,a_2)}{\partial a_2} + \frac{\partial \bar{Q}_1(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot 2l + \frac{\partial \bar{Q}_2(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot 2l^2 + \frac{\partial \bar{Q}_3(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot \frac{4}{3}l^3 \right] \right\} dt = 0$$

Снова, учитывая формулы (4) и (5), имеем:

$$\bar{P}_0(t,a_2) = \bar{P}_0(t),$$
$$\bar{P}_1(t,a_2) = -\left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)\frac{\bar{Q}_0(t)}{F_2} = -\frac{1}{F_2}\bar{Q}'_0(t) - 2\frac{a_2}{F_2}\bar{Q}_0(t),$$
$$\bar{P}_2(t,a_2) = \left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)\frac{\bar{P}'_0(t)}{c_2} = \frac{1}{c_2}\bar{P}''_0(t) + 2\frac{a_2}{c_2}\bar{P}'_0(t),$$
$$\bar{P}_3(t,a_2) = -\left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)^2\frac{\bar{Q}'_0(t)}{F_2c_2} = -\frac{1}{F_2c_2}\bar{Q}'''_0(t) - 4\frac{a_2}{F_2c_2}\bar{Q}''_0(t) -$$
$$-4\frac{a_2^2}{F_2c_2}\bar{Q}'_0(t),$$
$$\bar{Q}_0(t,a_2) = \bar{Q}_0(t), \bar{Q}_1(t,a_2) = -\frac{F_2}{c_2}\bar{P}'_0(t),$$
$$\bar{Q}_2(t,a_2) = \left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)\frac{\bar{Q}'_0(t)}{c_2} = \frac{1}{c_2}\bar{Q}''_0(t) + 2\frac{a_2}{c_2}\bar{Q}'_0(t),$$
$$\bar{Q}_3(t,a_2) = -\left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)\frac{F_2\bar{P}''_0(t)}{c_2^2} = -\frac{F_2}{c_2^2}\bar{P}'''_0(t) - 2\frac{a_2F_2}{c_2^2}\bar{P}''_0(t)$$

Учитывая эти формулы для параметра a_2, получаем алгебраическое уравнение .

$$\int_0^T \left\{ \left[\bar{P}_0(t) - 2l\left(\tfrac{1}{F_2}\bar{Q}'_0(t) + 2\tfrac{a_2}{F_2}\bar{Q}_0(t)\right) + 2l^2\left(\tfrac{1}{c_2}\bar{P}''_0(t) + 2\tfrac{a_2}{c_2}\bar{P}'_0(t)\right) - \right.\right.$$
$$-\left(\tfrac{1}{F_2c_2}\bar{Q}_0'''(t) + \tfrac{4a_2}{F_2c_2}\bar{Q}_0''(t) + \tfrac{4a_2^2}{F_2c_2}\bar{Q}_0'(t)\right)\tfrac{4}{3}l^3 - \tilde{P}_2(2l,t)] \times \left[-\tfrac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t) + \right.$$
$$\left. + \tfrac{4l^2}{c_2}\bar{P}'_0(t) - \left(\tfrac{4}{F_2c_2}\bar{Q}_0''(t) + \tfrac{8a_2}{F_2c_2}\bar{Q}_0'(t)\right)\tfrac{4}{3}l^3 \right] + [\bar{Q}_0(t) - \tfrac{2lF_2}{c_2}\bar{P}'_0(t) + \left(\tfrac{1}{c_2}\bar{Q}''_0(t) + \right.$$
$$\left. + \tfrac{2a_2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)\right)\cdot 2l^2 - \left(\tfrac{F_2}{c_2^2}\bar{P}_0'''(t) + \tfrac{2a_2F_2}{c_2^2}\bar{P}_0''(t)\right)\tfrac{4}{3}l^3 - \tilde{Q}_2(2l,t)] \cdot \left[\tfrac{4l^2}{c_2}\bar{Q}'_0(t) - \right.$$
$$\left.\left. - \tfrac{8l^3F_2}{3c_2^2}\bar{P}_0''(t) \right] \right\} dt = a_2^3\int_0^T \tfrac{512l^6}{9F_2^2c_2^2}\left(\bar{Q}_0'(t)\right)^2 dt -$$

$$-a_2^2\int_0^T\left(\left(-\frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t)+\frac{4l^2}{c_2}\bar{P'}_0(t)-\frac{16l^3}{3F_2c_2}\bar{Q}_0''(t)\right)\frac{32l^3}{3F_2c_2}\bar{Q}_0'\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t)+\frac{4l^2}{c_2}\bar{P'}_0(t)-\frac{16l^3}{3F_2c_2}\bar{Q}_0''(t)\right)\frac{16l^3}{3F_2c_2}\bar{Q}_0'(t)\right)dt$$
$$+a_2\int_0^T\left(\left(-\frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t)+\frac{4l^2}{c_2}\bar{P'}_0(t)-\frac{16l^3}{3F_2c_2}\bar{Q}_0''(t)\right)^2\right.$$
$$-\left(\bar{P}_0(t)-\frac{2l}{F_2}\bar{Q}_0'(t)+\frac{2l^2}{c_2}\bar{P}_0''(t)-\frac{4}{3}l^3\frac{1}{F_2c_2}\bar{Q}_0'''(t)-\tilde{P}_2(2l,t)\right)$$
$$\times\frac{32l^3}{3F_2c_2}\bar{Q}_0'(t)+\left(\frac{4l^2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)-\frac{8l^3F_2}{3c_2^2}\bar{P}_0''(t)\right)\times$$
$$\left.\times\left(\frac{4l^2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)-\frac{8l^3F_2}{3c_2^2}\bar{P}_0''(t)\right)\right)dt+$$

$$+\int_0^T\left(\left(\bar{P}_0(t)-\frac{2l}{F_2}\bar{Q}'_0(t)+\frac{2l^2}{c_2}\overline{P''}_0(t)-\frac{4}{3}l^3\frac{1}{F_2c_2}\bar{Q}_0'''(t)-\tilde{P}_2(2l,t)\right)\right.$$
$$\times\left(-\frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t)+\frac{4l^2}{c_2}\bar{P'}_0(t)-\frac{16l^3}{3F_2c_2}\bar{Q}_0''(t)\right)$$
$$+\left(\bar{Q}_0(t)-\frac{2lF_2}{c_2}\bar{P}_0'(t)+\frac{2l^2}{c_2}\bar{Q}_0''(t)-\frac{4}{3}l^3\frac{F_2}{c_2^2}\bar{P}_0'''(t)\right.$$
$$\left.\left.-\tilde{Q}_2(2l,t)\right)\left(\frac{4l^2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)-\frac{8l^3F_2}{3c_2^2}\bar{P}_0''(t)\right)\right)dt=0. \qquad (12)$$

Если вернемся к уравнению (7), и если возьмем 5 членов из ряда, получаем уравнение

$$\left[\bar{P}_0(t,a_2)+\bar{P}_1(t,a_2)2l+\bar{P}_2(t,a_2)2l^2+\bar{P}_3(t,a_2)\frac{4l^3}{3}+\bar{P}_4(t,a_2)\frac{2l^4}{3}\right.$$
$$\left.-\tilde{P}_2(2l,t)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\partial \bar{P}_0(t,a_2)}{\partial a_2}+\frac{\partial \bar{P}_1(t,a_2)}{\partial a_2}2l+\frac{\partial \bar{P}_2(t,a_2)}{\partial a_2}2l^2+\frac{\partial \bar{P}_3(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{4}{3}l^3+\frac{\partial \bar{P}_4(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{2}{3}l^4\right]$$

$$+\left[\bar{Q}_0(t,a_2)+\bar{Q}_1(t,a_2)2l+\bar{Q}_2(t,a_2)2l^2+\bar{Q}_3(t,a_2)\frac{4}{3}l^3+\bar{Q}_4(t,a_2)\frac{2}{3}l^4-\right.$$

$$\left.-\tilde{Q}_2(2l,t)\right]\left[\frac{\partial \bar{Q}_0(t,a_2)}{\partial a_2}+\frac{\partial \bar{Q}_1(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot 2l+\frac{\partial \bar{Q}_2(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot 2l^2+\frac{\partial \bar{Q}_3(t,a_2)}{\partial a_2}\cdot\frac{4}{3}l^3+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial \bar{Q}_4(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{2}{3}l^4\right]\right\}dt=0\,.$$

Выражения функций, входящих в это уравнение, легко можно получить с помощью формул (4) и (5).

$$\bar{P}_0(t,a_2)=\bar{P}_0(t),$$

$$\bar{P}_1(t,a_2)=-\left(\frac{d}{dt}+2a_2\right)\frac{\bar{Q}_0(t)}{F_2}=-\frac{1}{F_2}\bar{Q}'_0(t)-2\frac{a_2}{F_2}\bar{Q}_0(t),$$

$$\bar{P}_2(t,a_2)=\left(\frac{d}{dt}+2a_2\right)\frac{\bar{P}'_0(t)}{c_2}=\frac{1}{c_2}\bar{P}''_0(t)+2\frac{a_2}{c_2}\bar{P}'_0(t),$$

$$\bar{P}_3(t,a_2)=-\left(\frac{d}{dt}+2a_2\right)^2\frac{\bar{Q}'_0(t)}{F_2c_2}=-\frac{1}{F_2c_2}\bar{Q}'''_0(t)-4\frac{a_2}{F_2c_2}\bar{Q}''_0(t)-$$

$$-4\frac{a_2^2}{F_2c_2}\bar{Q}'_0(t),$$

$$\bar{P}_4(t,a_2)=\left(\frac{d}{dt}+2a_2\right)^2\frac{\bar{P}''_0(t)}{c_2^2}=\frac{1}{c_2^2}\bar{P}^{IV}{}_0(t)+4\frac{a_2}{c_2^2}\bar{P}'''_0(t)+4\frac{{a_2}^2}{c_2^2}\bar{P}''_0(t)$$

$$\bar{Q}_0(t,a_2)=\bar{Q}_0(t),\bar{Q}_1(t,a_2)=-\frac{F_2}{c_2}\bar{P}'_0(t),$$

$$\bar{Q}_2(t,a_2)=\left(\frac{d}{dt}+2a_2\right)\frac{\bar{Q}'_0(t)}{c_2}=\frac{1}{c_2}\bar{Q}''_0(t)+2\frac{a_2}{c_2}\bar{Q}'_0(t),$$

$$\bar{Q}_3(t,a_2)=-\left(\frac{d}{dt}+2a_2\right)\frac{F_2\bar{P}''_0(t)}{c_2^2}=-\frac{F_2}{c_2^2}\bar{P}'''_0(t)-2\frac{a_2F_2}{c_2^2}\bar{P}''_0(t),$$

$$\bar{Q}_4(t,a_2)=\left(\frac{d}{dt}+2a_2\right)^2\frac{\bar{Q}''_0(t)}{c_2^2}=\frac{1}{c_2^2}\bar{Q}^{IV}{}_0(t)+4\frac{a_2}{c_2^2}\bar{Q}'''_0(t)+4\frac{{a_2}^2}{c_2^2}\bar{Q}''_0(t).$$

Учитывая эти формулы, получаем следующие уравнения по параметру a_2:

$$\int_0^T\left\{\left[\bar{P}_0(t)-2l\left(\frac{1}{F_2}\bar{Q}'_0(t)+2\frac{a_2}{F_2}\bar{Q}_0(t)\right)+2l^2\left(\frac{1}{c_2}\bar{P}''_0(t)+2\frac{a_2}{c_2}\bar{P}'_0(t)\right)-\right.\right.$$

$$
-\left(\frac{1}{F_2c_2}\bar{Q}_0'''(t)+\frac{4a_2}{F_2c_2}\bar{Q}_0''(t)+\frac{4a_2^2}{F_2c_2}\bar{Q}_0'(t)\right)\frac{4}{3}l^3
$$

$$
+\left(\frac{1}{c_2^2}\bar{P}_0^{IV}(t)+\frac{4a_2}{c_2^2}\bar{P}_0'''(t)+\frac{4a_2^2}{c_2^2}\bar{P}_0''(t)\right)\frac{2}{3}l^4-\tilde{P}_2(2l,t)\Bigg]
$$

$$
\times\Bigg[-\frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t)+\frac{4l^2}{c_2}\bar{P}'_0(t)-\left(\frac{4}{F_2c_2}\bar{Q}_0''(t)+\frac{8a_2}{F_2c_2}\bar{Q}_0'(t)\right)\frac{4}{3}l^3
$$

$$
+\left(\frac{4}{c_2^2}\bar{P}_0'''(t)+\frac{8a_2}{c_2^2}\bar{P}_0''(t)\right)\frac{2}{3}l^4\Bigg]+[\bar{Q}_0(t)-\frac{2lF_2}{c_2}\bar{P}'_0(t)
$$

$$
+\left(\frac{1}{c_2}\bar{Q}''_0(t)+\frac{2a_2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)\right)\cdot 2l^2-\left(\frac{F_2}{c}\bar{P}_0'''(t)+\frac{2a_2F_2}{c_2^2}\bar{P}_0''(t)\right)\frac{4}{3}l^3
$$

$$
+\left(\frac{1}{c_2^2}\bar{Q}_0^{IV}(t)+\frac{4a_2}{c_2^2}\bar{Q}_0'''(t)+\frac{4a_2^2}{c_2^2}\bar{Q}_0''(t)\right)\frac{2}{3}l^4
$$

$$
-\tilde{Q}_2(2l,t)]\cdot\Bigg[\frac{4l^2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)-\frac{8l^3F_2}{3c_2^2}\bar{P}_0''(t)
$$

$$
+\left(\frac{4}{c_2^2}\bar{Q}_0'''(t)+\frac{8a_2}{c_2^2}\bar{Q}_0''(t)\right)\frac{2}{3}l^4\Bigg]\Bigg\}dt
$$

$$
=a_2^3\int_0^T\Bigg[\left(-\frac{16}{3}\frac{l^3}{F_2c_2}\bar{Q}_0'(t)+\frac{8}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{P}_0''(t)\right)
$$

$$
\times\left(\frac{16}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{P}_0''(1)-\frac{32}{3}\frac{l^3}{F_2c_2}\bar{Q}_0'(t)+\right)+\frac{128l^8}{9c_2^4}\left(\bar{Q}_0''(t)\right)^2\Bigg]dt
$$

$$
+a_2^2\int_0^T\Bigg[\left(-\frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t)+\frac{4l^2}{c_2}\bar{P}'_0(t)-\frac{16}{3}\frac{l^3}{F_2c_2}\bar{Q}_0''(t)+\frac{8}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{P}_0'''(t)\right)
$$

$$
\times\left(\frac{16}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{P}_0''(t)-\frac{32}{3}\frac{l^3}{F_2c_2}\bar{Q}_0'(t)\right)+\left(-\frac{16}{3}\frac{l^3}{F_2c_2}\bar{Q}_0'(t)+\frac{8}{3}\cdot\frac{l^4}{c_2^2}\bar{P}_0''(t)\right)
$$

$$
\times\left(-\frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t)+\frac{4l^2}{c_2}\bar{P}'_0(t)-\frac{16}{3}\frac{l^3}{F_2c_2}\bar{Q}_0''(t)+\frac{8}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{P}_0''(t)\right)
$$

$$
+\left(\frac{4l^2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)-\frac{8l^3F_2}{3c_2^2}\bar{P}_0''(t)+\frac{8}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{Q}_0'''(t)\right)\frac{16}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{Q}_0''(t)
$$

$$
+\left(\frac{4l^2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)-\frac{8l^3F_2}{3c_2^2}\bar{P}_0''(t)+\frac{8}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{Q}_0'''(t)\right)\frac{8}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{Q}_0''(t)\Bigg]dt+
$$

$$+a_2\int_0^T\Bigg[\left(\bar{P}_0(t)-\frac{2l}{F_2}\overline{Q'}_0(t)+\frac{2l^2}{c_2}\overline{P''}_0(t)-\frac{4}{3}\frac{l^3}{F_2c_2}\bar{Q}_0'''(t)+\frac{2}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{P}_0^{IV}(t)-\tilde{P}_2(2l,t)\right)$$

$$\times\left(\frac{16}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{P}_0''(t)-\frac{32}{3}\frac{l^3}{F_2c_2}\bar{Q}_0'(t)\right)$$

$$+\left(-\frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t)+\frac{4l^2}{c_2}\bar{P}'_0(t)-\frac{16}{3}\frac{l^3}{F_2c_2}\bar{Q}_0''(t)+\frac{8}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{P}_0'''(t)\right)^2$$

$$+\left(\bar{Q}_0(t)-\frac{2F_2l}{c_2}\bar{P}'_0(t)+\frac{2l^2}{c_2}\overline{Q''}_0(t)-\frac{4}{3}\frac{l^3F_2}{c_2^2}\bar{P}_0'''(t)+\frac{2}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{Q}_0^{IV}(t)\right.$$

$$\left.-\tilde{Q}_2(2l,t)\right)\frac{16}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{Q}_0''(t)$$

$$+\left(\frac{4l^2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)-\frac{8l^3F_2}{3c_2^2}\bar{P}_0''(t)+\frac{8}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{Q}_0'''(t)\right)\Bigg]dt+$$

$$+\int_0^T\Bigg[\left(\bar{P}_0(t)-\frac{2l}{F_2}\bar{Q}'_0(t)+\frac{2l^2}{c_2}\overline{P''}_0(t)-\frac{4}{3}\frac{l^3}{F_2c_2}\bar{Q}_0'''(t)+\frac{2}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{P}_0^{IV}(t)-\right.$$

$$\left.-\tilde{P}_2(2l,t)\right)\left(-\frac{4l}{F_2}\bar{Q}_0(t)+\frac{4l^2}{c_2}\bar{P}'_0(t)-\frac{16}{3}\frac{l^3}{F_2c_2}\bar{Q}_0''(t)+\frac{8}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{P}_0'''(t)\right)+$$

$$+\left(\bar{Q}_0(t)-\frac{2F_2l}{c_2}\bar{P}'_0(t)+\frac{2l^2}{c_2}\overline{Q''}_0(t)-\frac{4}{3}\frac{l^3F_2}{c_2^2}\bar{P}_0'''(t)+\frac{2}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{Q}_0^{IV}(t)-\right.$$

$$\left.-\tilde{Q}_2(2l,t)\right)\left(\frac{4l^2}{c_2}\bar{Q}'_0(t)-\frac{8l^3F_2}{3c_2^2}\bar{P}_0''(t)+\frac{8}{3}\frac{l^4}{c_2^2}\bar{Q}_0'''(t)\right)\Bigg]dt=0\,. \qquad (13)$$

В результате получаем.

Лемма 2: Пусть $\bar{P}_0(t)$ и $\bar{Q}_0(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями четвертого порядка, $\tilde{P}_2(2l,t)$ и $\tilde{Q}_2(2l,t)$ неперерывные функции. Тогда, если взять четыре или пять членов ряда в функционале (7) для параметра a_2, который дает минимальное значение функционала (6), получаем кубическое уравнение вида (12) и (13).

Если взять 2n члена из ряда (7), оно приобретает вид:

$$\int_0^T\left\{\left[\sum_{k=0}^{2n-1}\bar{P}_k(t,a_2)\frac{(2l)^k}{k!}-\tilde{P}_2(2l,t)\right]\sum_{m=0}^{2n-1}\frac{\partial\bar{P}_m(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^m}{m!}+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{k=0}^{2n-1}\bar{Q}_k(t,a_2)\frac{(2l)^k}{k!}-\tilde{Q}_2(2l,t)\right]\sum_{m=0}^{2n-1}\frac{\partial\bar{Q}_m(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^m}{m!}\right\}dt=0$$

Или, различая четные и нечетные индексы и, учитывая (4) и (5) , получаем:

$$\int_0^T \left\{ \left[\sum_{k=0}^{n-1} \overline{P}_{2k}(t,a_2)\frac{(2l)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{P}_{2k+1}(t,a_2)\frac{(2l)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \tilde{P}_2(2l,t) \right] \cdot \left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\partial \overline{P}_{2m}(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!} + \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\partial \overline{P}_{2m+1}(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right] + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \overline{Q}_{2k}(t,a_2)\frac{(2l)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{Q}_{2k+1}(t,a_2)\frac{(2l)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \right.$$

$$\left.\left. - \overline{Q}_2(2l,t) \right] \cdot \left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\partial \overline{Q}_{2m}(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!} + + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\partial \overline{Q}_{2m+1}(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right] \right\} dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k} C_k^s \cdot (2a_2)^s \, \frac{\overline{P}_0^{(2k-s)}(t)}{c_2^k}\frac{(2l)^{2k}}{(2k)!} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m} C_m^\nu \cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1} \frac{\overline{P}_0^{(2m-\nu)}(t)}{c_2^m}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!} dt + \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k} C_k^s \cdot (2a_2)^s \frac{\overline{P}_0^{(2k-s)}(t)}{c_2^k}\frac{(2l)^{2k}}{(2k)!} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m+1} (-1) C_{m+1}^\nu \cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1} \frac{\overline{Q}_0^{(2m-\nu+1)}(t)}{F_2 c_2^m}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!} + \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k+1} (-1) C_{k+1}^s \cdot (2a_2)^s \cdot$$

$$\cdot \frac{\overline{Q}_0^{(2k-s+1)}(t)}{F_2 c_2^k}\frac{(2l)^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m} C_m^\nu \cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1} \frac{\overline{P}_0^{(2m-\nu)}(t)}{c_2^m}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!} dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k+1} (-1) C_{k+1}^s \cdot (2a_2)^s \frac{\overline{Q}_0^{(2k-s+1)}(t)}{F_2 c_2^k}\frac{(2l)^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m+1} (-1) C_{m+1}^\nu \cdot 2\nu \cdot$$

$$\cdot (2a_2)^{\nu-1} \frac{\overline{Q}_0^{(2m-\nu+1)}(t)}{F_2 c_2^m}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!} - \int_0^T \tilde{P}_2(2l,t) \cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m} C_m^\nu \cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1} \frac{\overline{P}_0^{(2m-\nu)}(t)}{c_2^m}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!} dt -$$

$$- \int_0^T \tilde{P}_2(2l,t) \cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m+1} (-1) C_{m+1}^\nu \cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1} \frac{\overline{Q}_0^{(2m-\nu+1)}(t)}{F_2 c_2^m}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!} dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k} C_k^s \cdot (2a_2)^s \frac{\overline{Q}_0^{(2k-s)}(t)}{c_2^k}\frac{(2l)^{2k}}{(2k)!} \cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m} C_m^\nu \cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1} \frac{\overline{Q}_0^{(2m-\nu)}(t)}{c_2^m}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!} dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k} C_k^s \cdot (2a_2)^s \frac{\overline{Q}_0^{(2k-s)}(t)}{c_2^k}\frac{(2l)^{2k}}{(2k)!} \cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m} (-1) C_m^\nu \cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1} \frac{F_2 \overline{P}_0^{(2m+1-\nu)}(t)}{c_2^{m+1}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!} dt + \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k} (-1) C_k^s \cdot (2a_2)^s \frac{F_2 \overline{P}_0^{(2k+1-s)}(t)}{c_2^{k+1}}\frac{(2l)^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu}\cdot 2\nu\cdot(2a_2)^{\nu-1}\frac{\overline{Q}_0^{(2m-\nu)}(t)}{c_2^m}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!}dt+\int_0^T\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k}(-1)C_k^s\cdot(2a_2)^s\frac{F_2\overline{P}_0^{(2k+1-s)}(t)}{c_2^{k+1}}\cdot\frac{(2l)^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m}(-1)C_m^{\nu}\cdot 2\nu\cdot(2a_2)^{\nu-1}\frac{F_2\overline{P}_0^{(2m+1-\nu)}(t)}{c_2^{m+1}}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!}dt-\int_0^T\widetilde{Q}_2(2l,t)\cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m}(-1)C_m^{\nu}\cdot 2\nu\cdot(2a_2)^{\nu-1}\frac{F_2\overline{P}_0^{(2m+1-\nu)}(t)}{c_2^{m+1}}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!}dt-$$

$$-\int_0^T\widetilde{Q}_2(2l,t)\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m}C_m^{\nu}\cdot 2\nu\cdot(2a_2)^{\nu-1}\frac{\overline{Q}_0^{(2m-\nu)}(t)}{c_2^m}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!}dt.$$

Наконец, если взять $2n+1$ члена из ряда (7), это выражение принимает вид:

$$\int_0^T\left\{\left[\sum_{k=0}^{2n}\overline{P}_k(t,a_2)\frac{(2l)^k}{k!}-\widetilde{P}_2(2l,t)\right]\sum_{m=0}^{2n}\frac{\partial\overline{P}_m(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^m}{m!}+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{k=0}^{2n}\overline{Q}_k(t,a_2)\frac{(2l)^k}{k!}-\widetilde{Q}_2(2l,t)\right]\sum_{m=0}^{2n}\frac{\partial\overline{Q}_m(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^m}{m!}\right\}dt=0$$

Или, группируя члены по четным и нечетным индексам и, учитывая (4) и (5), получаем следующее алгебраическое уравнение (по a_2):

$$\int_0^T\left(\left[\sum_{k=0}^{n}\overline{P}_{2k}(t,a_2)\frac{(2l)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\overline{P}_{2k+1}(t,a_2)\frac{(2l)^{2k+1}}{(2k+1)!}-\widetilde{P}_2(2l,t)\right]\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{n}\frac{\partial\overline{P}_{2m}(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!}+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\partial\overline{P}_{2m+1}(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right]+$$

$$+\left[\sum_{k=0}^{n}\overline{Q}_{2k}(t,a_2)\frac{(2l)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\overline{Q}_{2k+1}(t,a_2)\frac{(2l)^{2k+1}}{(2k+1)!}-\overline{Q}_2(2l,t)\right]\times$$

$$\left.\times\left[\sum_{m=0}^{n}\frac{\partial\overline{Q}_{2m}(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!}+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\partial\overline{Q}_{2m+1}(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right]\right\}dt=$$

$$=\int_0^T\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k}C_k^s\cdot(2a_2)^s\frac{\overline{P}_0^{(2k-s)}(t)}{c_2^k}\frac{(2l)^{2k}}{(2k)!}\cdot\sum_{m=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{m}C_m^{\nu}\cdot 2\nu\cdot(2a_2)^{\nu-1}\frac{\overline{P}_0^{(2m-\nu)}(t)}{c_2^m}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!}dt+$$

$$+\int_0^T \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k} C_k^s \cdot (2a_2)^s \frac{\overline{P}_0^{(2k-s)}(t)}{c_2^k}\frac{(2l)^{2k}}{(2k)!}\cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m+1}(-1)C_{m+1}^{\nu}\cdot 2\nu \cdot$$

$$\cdot (2a_2)^{\nu-1}\frac{\overline{Q}_0^{(2m-\nu+1)}(t)}{F_2 c_2^m}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!}+\int_0^T \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k+1}(-1)C_{k+1}^s \cdot (2a_2)^s \frac{\overline{Q}_0^{(2k-s+1)}(t)}{F_2 c_2^k}\frac{(2l)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cdot$$

$$\sum_{m=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu}\cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1}\frac{\overline{P}_0^{(2m-\nu)}(t)}{c_2^m}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!}dt+\int_0^T \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k+1}(-1)C_{k+1}^s \cdot (2a_2)^s \frac{\overline{Q}_0^{(2k-s+1)}(t)}{F_2 c_2^k}\cdot$$

$$\cdot \frac{(2l)^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m+1}(-1)C_{m+1}^{\nu}\cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1}\frac{\overline{Q}_0^{(2m-\nu+1)}(t)}{F_2 c_2^m}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!}-$$

$$-\int_0^T \widetilde{P}_2(2l,t)\cdot \sum_{m=0}^{n-}\sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu}\cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1}\frac{\overline{P}_0^{(2m-\nu)}(t)}{c_2^m}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!}dt-$$

$$-\int_0^T \widetilde{P}_2(2l,t)\cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m+1}(-1)C_{m+1}^{\nu}\cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1}\frac{\overline{Q}_0^{(2m-\nu+1)}(t)}{F_2 c_2^m}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!}dt+$$

$$+\int_0^T \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k} C_k^s \cdot (2a_2)^s \frac{\overline{Q}_0^{(2k-s)}(t)}{c_2^k}\frac{(2l)^{2k}}{(2k)!}\cdot \sum_{m=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu}\cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1}\frac{\overline{Q}_0^{(2m-\nu)}(t)}{c_2^m}\cdot$$

$$\cdot \frac{(2l)^{2m}}{(2m)!}dt+\int_0^T \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k} C_k^s \cdot (2a_2)^s \frac{\overline{Q}_0^{(2k-s)}(t)}{c_2^k}\frac{(2l)^{2k}}{(2k)!}\cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m}(-1)C_m^{\nu}\cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1}\frac{F_2\overline{P}_0^{(2m+1-\nu)}(t)}{c_2^{m+1}}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!}dt+$$

$$+\int_0^T \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k}(-1)C_k^s \cdot (2a_2)^s \frac{F_2\overline{P}_0^{(2k+1-s)}(t)}{c_2^{k+1}}\frac{(2l)^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu}\cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1}\frac{\overline{Q}_0^{(2m-\nu)}(t)}{c_2^m}\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!}dt+\int_0^T \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k}(-1)C_k^s \cdot (2a_2)^s \frac{F_2\overline{P}_0^{(2k+1-s)}(t)}{c_2^{k+1}}\frac{(2l)^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m}(-1)C_m^{\nu}\cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1}\frac{F_2\overline{P}_0^{(2m+1-\nu)}(t)}{c_2^{m+1}}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!}dt-$$

$$-\int_0^T \widetilde{Q}_2(2l,t)\cdot \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m}(-1)C_m^{\nu}\cdot 2\nu \cdot (2a_2)^{\nu-1}\frac{F_2\overline{P}_0^{(2m+1-\nu)}(t)}{c_2^{m+1}}\frac{(2l)^{2m+1}}{(2m+1)!}dt-$$

$$-\int_0^T \tilde{Q}_2(2l,t)\cdot \sum_{m=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu}\cdot 2\nu\cdot(2a_2)^{\nu-1}\,\frac{\overline{Q}_0^{(2m-\nu)}(t)}{c_2^m}\,\frac{(2l)^{2m}}{(2m)!}\,dt=0$$

В результате получаем

Теорема: Если $\overline{\mathrm{P}}_0(\mathrm{t})$ и $\overline{\mathrm{Q}}_0(\mathrm{t})$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями 2n-порядка, $\tilde{\mathrm{P}}_2(2\mathrm{l},\mathrm{t})$ и $\tilde{\mathrm{Q}}_2(2\mathrm{l},\mathrm{t})$ непрерывными функционалами, тогда, для того, чтобы функционал (6) имел минимум, когда 2n или 2n +1 члены принимаются во внимание, тогда для параметра a_2 получаем алгебраическое уравнение степени (2n-1).

Учитывая известные из практики значения параметров по предложенной схеме, рассмотрим следующие вычисления

Пример.

В газлифтном процесе параметры $F_i,\ g,\ c_i,\ \rho_i\ (i=1,2)$ определены в интервалах $[0,l]$ и $[l,2l]$ соответственно, следующим образом.

$$0\le x\le l: F_1=0{,}006,\ \rho_1=0{,}717,\ c_1=331,\ l=1485$$

$$l\le x\le 2l: F_2=0{,}0042,\ \rho_2=700,\ c_2=850$$

Предположим ,что функции $P_0(t)$ и $Q_0(t)$ на границе имеют вид:

$$P_0(t)=\alpha_1 t+\beta_1,\quad Q_0(t)=\alpha_2 t+\beta_2$$

где $\alpha_1=1,\quad \beta_1=-1,\quad \alpha_2=1,\quad \beta_2=-1$.

Учитывая эти данные в (11) и (13) выполняется вычисление.Из линейного уравнения для λ_2 получено $\lambda_2=0.26$, а из (13) получено что $\lambda_2=0.24$. Поэтому можно сказать , что в зависимости от членов ряда ,значение λ_2 приближается к значению λ_2, известной из практики.

3. Заключение

Как известно, коэффициент гидравлического сопротивления λ_c линейным образом участвует в коэффициенте a_2 системы линейных дифференциальных уравнений (1).

Решение системы линейных уравнений гиперболического типа ищется в виде ряда по переменной t.

При определении коэффициента a_2 получается алгебраическое уравнение первой степени, если из бесконечного ряда берутся два или три слагаемых. Если из этих рядов выбирается четыре или пять слагаемых, то относительно a_2 получаем алгебраическое уравнение третьей степени. Наконец, если из сказанных рядов подобрать 2n или 2n+1 слагаемые, то относительно a_2 получается алгебраическое уравнение (2n-1) степени.

При увеличении числа слагаемых, полученное значение коэффициента гидравлического сопротивления приближается к последнему значению.

Авторы выражают огромную благодарность академику Фикрету Алиеву за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev F. A., Ismailov N.A., Namazov A.A. Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, V.23, N.5, 2015, pp.511–518.
2. Aliev F.A., Ilyasov M.K., Ismailov N.A., Gasımov Y.S., Mutallimov M.M., Jamalbekov M.A., Rajabov M.F. Mathematical simulation and control of gaslift process: from theory to practice, Proceedings of BraNobel conference, 2012, pp.66-80.
3. Aliev F.A., Ismailov N.A. Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math., V.12, N.3, 2013, pp.306-313.
4. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F. Algorithm for calculating the parameters of formation of gas-liquid mixture in the shoe of gas lift well, Appl. Comput. Math., 2016, V.15, N.3, pp.370-376.
5. Aliev F.A., Ismailov N.A.,Temirbekova L.N. Methods of solving the choice of extremal modes for the gas-lift process, Appl. Comput. Math., V.11, N.3, 2012, pp.348-357.
6. Aliev, F.A., Ismailov, N.A., Mukhtarova, N.S. Algorithm to determine the optimal solution of a boundary control problem, Automation and Remote Control, V.76, N.4, 2015, pp.627-633.
7. Eikrem G.O., Aamo O.N., Foss B.A. Stabilization of gas-distribution instability in single-point dual gas-lift wells, SPE Production and Operations, V.21, N.2, 2006, pp.1-20.
8. Imsland L.S., Eikrem G.O., Foss B. A. A state feedback controller for the class of nonlinear positive systems applied to stabilization of gas-lifted oil wills, Control Engineering Practice, N.3, 2006, pp.7-15.
9. Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Гулиев А.П., Ильясов М.Х. Метод рядов в решении одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, возникающих при добыче нефти, Proceedings of the IAM, V.2, N.2, 2013, с.113-136.
10. Алиев Н.А., Гулиев А.П., Тагиев Р.М, Существование и единственность решения одной краевой задачи, описываемой системой уравнений гиперболического типа, Доклад НАН Азерб., Т. LXX, N.2, 2014, с.10-13.

Determination of the coefficient of hydraulic resistance in gas lift process described by partial derivatives hyperbolic equations

N.A.Aliev[1], G.S.Alieva[1], R.M Tagıev[1], A.S. Faradjov[1] M. Khanbabayeva[3]

[1]Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan
[2]Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan
[3]Institute of Geology of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan
e-mail: galiyeva20@mail.ru, tagiyev.reshad@gmail.com

ABSTRACT

In this work, the mathematical model of oil production with gas-lift method is described and accepted that the motion of equation gas and gas-liquid mixture is described with hyperbolic special derivative system of differential equations. The function $P(x,t)$ and $Q(x,t)$ appointed with sequence method.From these functions dependent functional is created and hydraulic resistance coefficient which gives the minimum value to this functional is appointed .It is shown that the value of λ_c is approaching to the optimal value is known from practise.

Keywords: gas-lift, gas-liquid mixture, hydraulic resistance coefficient, sequence method.

REFERENCES

1. Aliev F. A., Ismailov N.A., Namazov A.A. Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, V.23, N.5, 2015, pp.511–518.
2. Aliev F.A., Ilyasov M.K., Ismailov N.A., Gasımov Y.S., Mutallimov M.M., Jamalbekov M.A., Rajabov M.F. Mathematical simulation and control of gaslift process: from theory to practice, Proceedings of BraNobel conference, 2012, pp.66-80.
3. Aliev F.A., Ismailov N.A. Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math., V.12, N.3, 2013, pp.306-313.
4. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F. Algorithm for calculating the parameters of formation of gas-liquid mixture in the shoe of gas lift well, Appl. Comput. Math., 2016, V.15, N.3, pp.370-376.
5. Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Methods of solving the choice of extremal modes for the gas-lift process, Appl. Comput. Math., V.11, N.3, 2012, pp.348-357.

6. Aliev, F.A., Ismailov, N.A., Mukhtarova, N.S. Algorithm to determine the optimal solution of a boundary control problem, Automation and Remote Control, V.76, N.4, 2015, pp.627-633.
7. Eikrem G.O., Aamo O.N., Foss B. A. Stabilization of gas-distribution instability in single-point dual gas-lift wells, SPE Production and Operations, V.21, N.2, 2006, pp.1-20.
8. Imsland L. S., Eikrem G.O., Foss B.A. A state feedback controller for the class of nonlinear positive systems applied to stabilization of gas-lifted oil wills, Control Engineering Practice, N.3, 2006, pp.7-15.
9. Aliev N.A., Aliev F.A., Guliev A.P., Ilyasov M.Kh. Metod ryadov v reshenii odnoy kraevoy zadachi dlya sistemı uravneniy giperbolicheskogo tipa, voznikayushikh pri dobıche nefti, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.2, N.2, 2013, s.113-136 (Aliev N.A., Aliev F.A., Guliev A.P., Ilyasov M.Kh. Method series to solving a boundary value problem for the system of hyperbolic equations, arising in the oil production, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.2, N.2, 2013, pp.113-136) (in Russian).
10. Aliev N.A., Guliev A.P., Tagiyev R.M. Sushestvovanie i edinstvennost' resheniya odnoy kraevoy zadachi, opisıvaemoy sistemoy uravneniy giperbolicheskogo tipa, Doklad NAN Azerb., T. LXX, N.2, 2014, s.10-13 (Aliev N.A., Guliev A.P., Tagiyev R.M. The existence and uniqueness of the solution of a boundary problem described by the system of hyperbolic equations, Reports National Academy of Sciences of Azerbaijan, V.LXX, N.2, 2014, pp.10-13) (in Russian).